局所 Langlands 対応の幾何的構成

伊藤 哲史[1]

1. ヒドラとの戦い

局所 Langlands 対応は比喩で説明されることが多い．まずは，p 進体上の GL_n の局所 Langlands 対応を証明した [HT] の冒頭から一節を引用しよう（下線は引用者による）．

> The local Langlands conjecture is one of those hydra-like conjectures which seems to grow as it gets proved. ([HT], p.1)

ここに登場する "hydra" とは，もちろん，ギリシア神話の不死身の怪物ヒドラ（ヒュドラー）である．ヒドラは様々な物語・ゲーム・アニメ等にヒドラは登場する．ヒドラの亜種が登場することもあれば，パワーアップ版が登場することもある．[KP] では，ヘラクレスはヒドラと戦い，そして勝利する（勝利戦略が存在する）．しかし，ヒドラの首を切り落としても新しい首が生えてくるから，ヒドラとの戦いにはとても長い年月が必要となる．ヒドラについては苦い思い出をお持ちの方も少なくないかもしれない．

ギュスターヴ・モロー画 『ヘラクレスとレルネのヒュドラ』
（パブリック・ドメイン）

不死身の怪物であるヒドラが局所 Langlands 対応にまで登場するのは何故だろうか．おそらく，通常の数学の予想・定理とは異なる，局所 Langlands 対応の次のような特徴

- 局所 Langlands 対応が定式化に長い年月を要した定理である．一般の簡約代数群 G では未解決であるばかりでなく，予想の正確な定式化すらなされていない．
- $G = \mathrm{GL}_n$（や一部の古典群）の場合のように，局所 Langlands 対応が定式化・証明されている場合であっても，その証明はとても複雑で間接的である．定式化・別証明が繰り返し与えられている．

[1]京都大学大学院理学研究科数学教室 （e-mail : `tetsushi@math.kyoto-u.ac.jp`）

- 現在も局所 Langlands 対応の新バージョンが生まれている．まさにヒドラのように倒しても倒しても（姿形を変え，より強力になって！）何度でも復活する．

によるものが大きいのではないだろうか．

本稿では局所 Langlands 対応の幾何的構成についての解説を試みる．§2 で局所 Langlands 対応の復習をする（予想 2.1）．一般の G の場合はややこしいので，ひとまずは，GL_n の場合や $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ の場合を念頭におくとよい（本報告集の [池松], [三枝] を参照）．一般の連結簡約代数群 G の局所 Langlands 対応は，一見すると何でこんなものを考えるのかと思うようなものかもしれないが，よくよく考えるとやはりよくできた予想である．§3 では，内部形式 (inner form) の表現もあわせた形の対応を述べる（局所 Langlands-Vogan 対応の Kottwitz によるバージョン, 予想 3.1）．幾何的構成においては，連結簡約群とその内部形式が同時に現れるので，局所 Langlands 対応もバージョンアップ（進化）させて考察することが必要である．そして，§4 で表現の幾何的構成の例として $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の幾何的構成法（Deligne-Lusztig 理論の一例）を紹介する．§5 では幾何的構成の主人公である Rapoport-Zink 空間について解説する．そして，§6 では Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに関する予想（Kottwitz 予想）について述べる．

Rapoport-Zink 空間については，特別な場合（Lubin-Tate 空間や Drinfeld 上半空間など）に限った解説はいくつか存在するが，L パケット内の対応も含めて説明した日本語の文献はそれほど多くはないようである．本稿では，ややこしくならない範囲で一般的な設定で述べるように心がけた（完全に一般的な設定で述べたわけではない）．著者の理解不足もあり，説明が不足している部分やかえって分かりにくくなった部分もあるかもしれない．不適切な箇所については，あらかじめお詫びするとともに，読者の皆様は必要に応じて [RZ], [Ra], [Far1], [SW] などで補っていただくことをお願いしたい．また，本稿の最後に関係する文献をいくつか挙げたが，これはほんの一部であって決して網羅的なものではないことを強調しておく（局所 Langlands 対応の幾何的構成の周辺は手法も分野も多岐に渡るので，網羅的な文献リストを作ることはとても難しい）．関連分野の基本文献がごっそり抜けていることも多い．

謝辞　「整数論サマースクール」の世話人の皆様，特に原下秀士さんには，講演の機会をいただきましたことに感謝致します．講演の準備・原稿の執筆が遅れてしまい，ご迷惑をおかけしたことをお詫び致します．

2. p 進体上の局所 Langlands 対応（復習）

局所 Langlands 対応とは，局所類体論の一般化であり，局所体（局所コンパクト位相体）上の簡約代数群の表現と，Galois 群（正確には Weil 群や Weil-Deligne 群などの Galois 群を修正した群）の表現の対応である．局所 Langlands 対応は全ての局所体に対して成り立つと期待されているが，以下では p 進体の場合のみを説明する．正標数の局所体 $\mathbb{F}_q((t))$ の場合は，技術的な相違点はあるものの，p 進体とほぼ同様の対応が成り立つと期待されている．一方で，アルキメデス的局所体（$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）の場合はいくつかの修正が必要となる．様々な局所体の局所 Langlands 対応の比較については，Vogan の解説 [Vog] が示唆に富んでいる．

p を素数とし，F を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする．このような F を p **進体**あるいは p **進局所体**という．F の**絶対 Galois 群**を $\Gamma_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ とおく（F の絶対 Galois 群を G_F と書く流儀もあるが，そうすると局所 Langlands 対応が「$G(F)$ の表現と G_F の表現の対応」となってしまい紛らわしいので，体 F の絶対 Galois 群は Γ_F と書く方がよい）．F の剰余体を $\mathbb{F}_q$ とおく．$\mathrm{Frob}_q \in \Gamma_{\mathbb{F}_q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$

を幾何的 **Frobenius 元**とする．Frob_q は，$\mathrm{Frob}_q(x) = x^{1/q}$ $(x \in \overline{\mathbb{F}}_q)$ で定まる $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ の元である．自然な全射 $\Gamma_F \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ による $\mathrm{Frob}_q^i \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ の逆像を $U_i \subset \Gamma_F$ とおく．$I_F := U_0$ を F の**惰性群**といい，$W_F := \coprod_{i\in\mathbb{Z}} U_i$ を F の **Weil 群**という．各 $U_i \subset \Gamma_F$ に相対位相を定める．各 $U_i \hookrightarrow W_F$ が連続になる最も強い位相を W_F に入れる．この位相に関して $I_F = U_0 \subset W_F$ は開部分群であり，W_F は局所コンパクト位相群となる．局所類体論から定まる位相群の同型（**Artin 相互写像**）を

$$\mathrm{Art}_F\colon F^\times \xrightarrow{\cong} W_F^{\mathrm{ab}}$$

とおく（素元の像が U_1 に含まれるように正規化する）．右辺は W_F のアーベル化，すなわち，W_F を導来群（交換子群）$[W_F, W_F]$ の閉包で割った群である．

G を F 上定義された連結簡約代数群とする．G の F-有理点のなす群 $G(F)$ は局所コンパクト位相群である．$G(F)$ の表現の構造を解明し，表現を分類することは表現論の主な目的の一つである（もちろん本サマースクールの主目的の一つでもある）．$G(F)$ の表現のクラスとしては，許容表現・p 進（ℓ 進）表現・mod p（mod ℓ）表現など様々なものがあり，表現のクラスごとに局所 Langlands 対応が存在すると期待されているようだが，本稿では最も基本的な複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間における既約許容 (admissible) 表現の場合を述べる（本報告集の [高瀬] を参照）．保型表現論の局所成分として自然に現れるのがこの場合である．

まずは，局所類体論から，Art_F により次のような 1 対 1 の対応が得られることを思い出そう．

$$\left\{ \mathrm{GL}_1(F) \text{ の既約許容表現 } \pi \right\}_{/\cong} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \text{連続準同型 } \phi\colon W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times \right\}$$

（対応の作り方：ϕ の像はアーベル群なので ϕ は W_F^{ab} から $\mathbb{C}^\times$ への連続準同型を定める．$\mathrm{GL}_1(F) = F^\times \xrightarrow{\mathrm{Art}_F} W_F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^\times$ の合成を π とおく（$\pi := \phi \circ \mathrm{Art}_F$）．逆の対応を作るには，$\mathrm{GL}_1(F) = F^\times$ はアーベル群であるから，$\mathrm{GL}_1(F)$ の既約許容表現が 1 次元表現であることを用いればよい.）

この対応を一般化して，任意の連結簡約代数群 G に対し，$G(F)$ の既約許容表現と W_F の表現が対応するというのが，局所 Langlands 対応の大雑把な主張である：

$$\left\{ G(F) \text{ の既約許容表現 } \pi \right\} \overset{\text{“対応”}}{\longleftrightarrow} \left\{ W_F \text{の連続表現 (Galois 表現) } \phi \right\}$$

しかし，これはあまりにも大雑把であり数学の予想とは言えない．まずは両辺を定義して予想を定式化することが問題となる．

局所 Langlands 対応の右辺の定式化のためには，双対群と L 群と呼ばれる位相群が用いられる．G の**双対群** $\widehat{G}$ は，G のルート系を「逆」にして得られる $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群の $\mathbb{C}$-有理点のなす群である（詳しくは本報告集の [今野] を参照．[Bor], [Cog] も参照）．$\widehat{G}$ には W_F が作用し，G の **L 群**が半直積 ${}^L G := \widehat{G} \rtimes W_F$ として定義される．${}^L G$ は完全系列

$$1 \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow {}^L G \longrightarrow W_F \longrightarrow 1$$

を持つ．連続準同型

$$\phi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

が次の 4 つの条件をみたすとき，ϕ を G の **L パラメータ**（または **Langlands パラメータ**）という．

- $\phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \widehat{G}$.
- ϕ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への制限 $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G}$ は代数的（つまり，$\mathbb{C}$ 上の代数群の準同型）.
- $W_F \xrightarrow{(\mathrm{id},1)} W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\phi} {}^L G \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} W_F$ の合成は恒等写像である（pr_i は第 i 成分への射影）.
- （**Frobenius 半単純性**）　任意の $\sigma \in W_F$ に対し，$(\mathrm{pr}_1 \circ \phi)(\sigma) \in \widehat{G}$ は半単純元である.

L パラメータ ϕ, ϕ' が **$\widehat{G}$-共役**とは，$g\phi g^{-1} = \phi'$ をみたす $g \in \widehat{G}$ が存在することをいう．例えば，$G = \mathrm{GL}_n$ のときは，$\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ${}^LG = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_F$ となり，GL_n の L パラメータは，直積群 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現であって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への制限が代数的で W_F の元の像が半単純（対角化可能）なものと 1 対 1 に対応する．さらに $G = \mathrm{GL}_1$ のときは，$\widehat{G} = \mathbb{C}^\times$ だから，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は自明である．$\mathbb{C}^\times$ の元はすべて半単純なので，結局，GL_1 の L パラメータが連続準同型 $\phi \colon W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と 1 対 1 に対応する．

以上を用いて局所 Langlands 対応を次のように述べることができる．

予想 2.1 (局所 Langlands 対応)**.** 各ファイバーが有限集合である “自然” な写像

$$\mathrm{LLC}_G \colon \Big\{ G(F) \text{ の既約許容表現 } \pi \Big\}_{/\cong} \longrightarrow \Big\{ G \text{ の } L \text{ パラメータ } \phi \Big\}_{/\widehat{G}\text{-共役}}$$

が存在する．左辺は $G(F)$ の既約許容表現の同値類の集合を表し，右辺は L パラメータの $\widehat{G}$-共役類の集合を表す．

$\mathrm{LLC}_G(\pi)$ を π の **L パラメータ**（または **Langlands パラメータ**）という．ϕ の逆像（有限集合）

$$\Pi_\phi^G := \mathrm{LLC}_G^{-1}(\phi)$$

を **L パケット**という．G が準分裂のときは，LLC_G は全射であると予想されている．一般の G に対し，LLC_G の像を記述する予想もある（[Bor]）．

予想 2.1 はかなり大雑把な主張である．予想 2.1 をきちんとした数学の予想として定式化するためには，LLC_G がみたすべき条件（LLC_G の特徴付け）を一つ選ぶ必要がある．しかし，LLC_G のどのような特徴付けが「自然」であるかは，分野によっても研究者によっても，また時代によっても異なるのが実情である．ある定式化（特徴付け）において予想 2.1 は解決されているが，別の定式化では未解決ということが起こり得る．現在広く用いられている LLC_G の特徴付けとしては，次のようなものがある．

(1) GL_1 の場合には，$\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_1}$ は局所類体論から誘導される写像として定める．局所 Langlands 対応は局所類体論の一般化なので，当然そうなるべきである．

(2) GL_n の場合は，Zelevinsky 分類を用いて π が超尖点表現の場合に帰着し，ペアの L 関数と ε 因子を用いて n に関する帰納法で特徴づける（Zelevinsky 分類は本報告集の [近藤] を参照．GL_n の局所 Langlands 対応は本報告集の [三枝] を参照）．この特徴付けをみたす写像 $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ が，存在すればただ一つであることは [He1] で証明された（[He3] も参照）．一般の n に対する $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ の存在は [HT] で証明された（その直後に簡単な別証明も発見された（[He2]））．それ以前に，等標数の非アルキメデス局所体の場合が [LRS] で証明されていた．等標数の場合は，GL_n の大域 Langlands 対応の系として $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ を構成することもできる（[Laf]）．最近になって，Scholze は，形式群の変形空間を用いた $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ の新しい特徴付けを提案し（ある種の指標関係式を用いる），その定式化を用いた GL_n の局所 Langlands 対応の新証明を与えた（[Scho]）．なお，[Scho] における $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ は [HT], [He2] における $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ と一致する（同じ特徴付けをみたす）ことが証明されているので，対応の一意性を心配する必要は無い．

(3) G が GL_n と関係の深い群の場合に，$G(F)$ の既約許容表現を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約許容表現と関係付けることで LLC_G を特徴付けたり，証明できる場合がある．
   - G が古典群（特殊斜交群 Sp_{2n}，特殊直交群 SO_n，ユニタリ群 U_n）の場合に，誘導表現の可約点を用いた LLC_G の特徴付けが [MT], [Mœ] で提案されている．[MT], [Mœ] では，その定式化における LLC_G（の候補）も構成されてる．

- また，G が古典群の場合には，twisted endoscopy における指標関係式を用いて LLC_G を特徴付けることもできる（場合がある）．U_3 の場合は [Ro] による（本報告集の [池松] も参照）．準分裂な $\mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{SO}_n$ の場合は [A3] を，準分裂な U_n の場合は [Mo] を参照．ただし，SO_{2n} の場合は，まだ完全に対応が証明されているわけではないようである（[A4]）．
- その他のいくつかの群の場合に $G(F)$ の既約許容表現 π を具体的に構成する方法を使って LLC_G を構成することができる場合がある．例えば，$G = \mathrm{SL}_n$（や SL_n の内部形式）の場合は，GL_n（や GL_n の内部形式）の既約許容表現の G への制限の分解（分岐則）を用いて $\mathrm{LLC}_{\mathrm{SL}_n}$ を構成することができる（[LL], [HS]）．また，$G = \mathrm{Sp}_4$（や GSp_4）の場合は，$G(F)$ の既約許容表現を $\mathrm{GL}_2(F)$ や $\mathrm{GL}_4(F)$ の既約許容表現からテータ対応を用いて具体的に構成することで，$\mathrm{LLC}_{\mathrm{Sp}_4}$（や $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GSp}_4}$）を構成することができる（[GT1], [GT2]）．

(4) これ以外にも表現のクラスを制限することで LLC_G（の候補）が構成されている場合がある．[DR] では,「深さ 0 の超尖点表現」に対する LLC_G の候補が，Deligne-Lusztig 理論と Bruhat-Tits 理論を用いて具体的に構成されている（GL_2 の場合の深さ 0 の超尖点表現については，本報告集の [時本] を参照）．

もちろんこれですべてを網羅しているわけではない．様々な部分的結果が得られており，このリストは今日も（ヒドラの首のように次々と！）増え続けているだろう．LLC_G の複数の構成法がある場合，それらが同一の写像になっていることがまだ証明されていない場合もあるので，応用する際には注意が必要である．

3. 局所 Langlands-Vogan 対応

局所 Langlands 対応には様々なバージョン（進化形）が知られている．後で幾何的構成との関係を述べる都合上，本節では，連結簡約群 G だけでなく G の内部形式 (inner form) もあわせた形の対応を述べる．このような形の局所 Langlands 対応は Vogan によるものであり，**局所 Langlands-Vogan 対応**とも呼ばれている（[Vog]）．

簡単のため**本節では予想 2.1，すなわち局所 Langlands 対応が成立していることを仮定する**．G を p 進体 F 上の連結簡約代数群とする．G は F 上準分裂 (quasi-split) と仮定すると，予想 2.1 より，自然な全単射

$$\mathrm{LLC}_G\colon \left\{ G(F) \text{ の } L \text{ パケット } \Pi_\phi^G \right\} \xrightarrow{\cong} \left\{ G \text{ の } L \text{ パラメータ } \phi \right\}_{/\widehat{G}\text{-共役}}$$

の存在が期待される．J を G の内部形式 (inner form) とする．例えば，$G = \mathrm{GL}_n$ の場合は $J \cong \mathrm{GL}_m(D)$ である（m は n の約数，D は F 上の中心的斜体で $\dim_F D = n^2/m^2$ をみたす）．このとき，標準的な同型 $\widehat{G} \cong \widehat{J}$, ${}^L G \cong {}^L J$ が存在し，G の L パラメータと J の L パラメータは同一視できる．J に関する予想 2.1 より，自然な単射

$$\mathrm{LLC}_J\colon \left\{ J(F) \text{ の } L \text{ パケット } \Pi_\phi^J \right\} \hookrightarrow \left\{ G \text{ の } L \text{ パラメータ } \phi \right\}_{/\widehat{G}\text{-共役}}$$

の存在が期待される．J は準分裂とは限らないので（もし J が準分裂なら $G \cong J$ である），LLC_J は全射とは限らない．この 2 つの写像を組み合わせることで，単射

$$\mathrm{LLC}_G^{-1} \circ \mathrm{LLC}_J\colon \left\{ J(F) \text{ の } L \text{ パケット } \Pi_\phi^J \right\} \hookrightarrow \left\{ G(F) \text{ の } L \text{ パケット } \Pi_\phi^G \right\}$$

を得る．これを一般化された**局所 Jacquet-Langlands 対応**という．これは，endoscopy における表現の対応である endoscopic transfer の特別な場合であり，指標関係式により（$\mathrm{LLC}_G, \mathrm{LLC}_J$ の存在とは

独立に）特徴付けられると期待されている（ユニタリ群の場合の endoscopic transfer は，本報告集の [池松] を参照）．

それでは，L パラメータ ϕ に対し，有限集合 Π_ϕ^G, Π_ϕ^J の「内部」はどのように記述されるのだろうか（L パケットの中身を内視鏡 (endoscope) で覗くのが endoscopy である）．Arthur は，ϕ の S 群を

$$S_\phi^{\mathrm{Arthur}} := \pi_0\bigl(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)/Z(\widehat{G})^{W_F}\bigr)$$

で定義し，これを用いて L パケット内の表現のパラメータ付けと保型表現の重複度公式に関する一連の予想（Arthur 予想）を提出した（[A1]）．記号についていくつか説明する．まず，L パラメータ $\phi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$ の像 $\mathrm{Im}\,\phi$ は ${}^LG$ の部分群であり，$\widehat{G}$ も ${}^LG$ の部分群であるので，その中心化群が

$$\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi) := \bigl\{g \in \widehat{G} \bigm| \forall x \in \mathrm{Im}\,\phi,\ gx = xg\bigr\}$$

で定義される．$\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ は $\widehat{G}$ の代数的部分群である．一方，G の L 群は半直積 ${}^LG = \widehat{G} \rtimes W_F$ であり，W_F の $\widehat{G}$ への外部自己同型としての作用が標準的に定まっている．したがって，W_F の $\widehat{G}$ の中心 $Z(\widehat{G})$ への共役作用が標準的に定まる．この作用の固定部分群

$$Z(\widehat{G})^{W_F} := \bigl\{g \in Z(\widehat{G}) \bigm| \forall w \in W_F,\ wgw^{-1} = g\bigr\}$$

は ${}^LG$ の中心に含まれる．$Z(\widehat{G})^{W_F}$ は $\widehat{G}$ の代数的部分群であり，剰余群 $H := \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)/Z(\widehat{G})^{W_F}$ は $\mathbb{C}$ 上の（連結とは限らない）代数群となる．H 単位元を含む連結成分を H^0 とおき，剰余群をとったものが Arthue の S 群 $S_\phi^{\mathrm{Arthur}} = \pi_0(H) = H/H^0$ である（一般に位相群 H に対して，H の連結成分のなす群を $\pi_0(H)$ で表す)．

Arthur は，Π_ϕ^G が S_ϕ^{Arthur} の既約表現の同値類の集合と 1 対 1 に対応すると予想した：

$$\Bigl\{S_\phi^{\mathrm{Arthur}}\text{の既約表現}\Bigr\}_{/\cong} \overset{1:1\ (?)}{\longleftrightarrow} \Pi_\phi^G$$

$G = \mathrm{GL}_n$ の場合は Schur の補題より S_ϕ は自明な群となるので，すべての L パケットの位数は 1 であることが期待される（もちろんこれは [HT], [He2], [Scho] の結果と合致する）．U_3 の場合の Arthur の予想については，本報告集の [池松] を参照．一般の G では，この対応は標準的には定まらず付加的なデータ（**Whittaker データ**）を 1 つ固定する必要があると考えられているようである（[Vog], [GGP]）．

Vogan は，内部形式 J の L パケットも統一的に扱うために，G の**純内部形式** (pure inner form) の概念を導入した．そして，Arthur の S 群の定義を修正した S 群を

$$S_\phi^{\mathrm{Vogan}} := \pi_0\bigl(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)\bigr)$$

で定め，次のような 1 対 1 の対応

$$\Bigl\{S_\phi^{\mathrm{Vogan}}\text{の既約表現}\Bigr\}_{/\cong} \overset{1:1\ (?)}{\longleftrightarrow} \coprod_{J\ \text{は}\ G\ \text{の純内部形式}} \Pi_\phi^J$$

の存在を予想した（Vogan の予想については [Vog], [GGP] を参照）．このような予想は Kottwitz によっても考察されていたようである（Kottwitz は志村多様体の Hasse-Weil ゼータ関数の計算（[Ko2]）と関連して考察したようだが，Kottwitz 自身により予想が述べられた論文は存在しないようである）．ここでは [Ra], [Kal] に従い，局所 Langlands-Vogan 予想の Kottwitz によるバージョンを述べる．簡単のため，**G の中心 $Z(G)$ は連結である**と仮定する．このとき，双対群 $\widehat{G}$ の導来群 $\widehat{G}_{\mathrm{der}} := [\widehat{G}, \widehat{G}]$ は単連結な半単純群となり，**Kottwitz 同型**と呼ばれる標準的な 1 対 1 の対応

$$\Bigl\{\text{準同型 } Z(\widehat{G}_{\mathrm{der}})^{W_F} \longrightarrow \mathbb{C}^\times\Bigr\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} H^1\bigl(\Gamma_F, G_{\mathrm{ad}}(\overline{F})\bigr) = \Bigl\{J \Bigm| J\text{ は } G \text{ の内部形式}\Bigr\}_{/\cong}$$

が存在する（Kottwitz 同型については，[Ko1, Proposition 6.4] を参照）．$G_{\mathrm{ad}} := G/Z(G)$ は G の随伴群である．（位数有限とは限らない）準同型 $\chi\colon Z(\widehat{G})^{W_F} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し，χ を部分群 $Z(\widehat{G}_{\mathrm{der}})^{W_F} \subset Z(\widehat{G})^{W_F}$ に制限することで，全射

$$\left\{\chi\colon Z(\widehat{G})^{W_F} \longrightarrow \mathbb{C}^\times\right\} \twoheadrightarrow H^1\bigl(\Gamma_F, G_{\mathrm{ad}}(\overline{F})\bigr) = \left\{J \;\middle|\; J \text{ は } G \text{ の内部形式}\right\}_{/\cong}$$

が得られる．この写像において χ に対応する G の内部形式を J_χ とおく．$Z(\widehat{G}_{\mathrm{der}})^{W_F}$ は有限群だが，$Z(\widehat{G})^{W_F}$ は有限群とは限らないことに注意しよう．この写像 $\chi \mapsto J_\chi$ は，一般には，無限集合から有限集合への全射となる（例えば $G = \mathrm{GL}_n$ の場合を考えよ）．

予想 3.1 (局所 Langlands-Vogan 対応の Kottwitz によるバージョン)**.** 以下を仮定する．

- G の中心 $Z(G)$ は連結である．
- $\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)/Z(\widehat{G})^{W_F}$ は有限群である（このような ϕ を**楕円的** (elliptic) という）．

このとき，任意の準同型 $\chi\colon Z(\widehat{G})^{W_F} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し，次の全単射が存在する．

$$\mathrm{LLC}_{\phi,\chi}\colon \left\{\rho : \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi) \text{ の既約表現} \;\middle|\; \rho|_{Z(\widehat{G})^{W_F}} = \chi\right\}_{/\cong} \xleftrightarrow{1:1} \Pi_\phi^{J_\chi}$$

χ が自明指標の場合は ρ は S_ϕ^{Arthur} の既約表現とみなせる．このときの予想 3.1 の対応は Arthur による対応であると期待される．予想 3.1 は，局所 Langlands 対応（予想 2.1）の Arthur による精密化のさらなる精密化とみなせる．

予想 3.1 の定式化の特徴は，（有限群とは限らない）$\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ の既約表現を用いる点にある（一方で $S_\phi^{\mathrm{Arthur}}, S_\phi^{\mathrm{Vogan}}$ は有限群である）．§5, §6 に述べる Rapoport-Zink 空間のコホモロジーによる局所 Langlands 対応の幾何的構成のためには，このバージョンの方が扱いやすい．

注意 3.2. 予想 3.1 の仮定がみたされない場合も同様の予想を定式化することができるかもしれないが，技術的に微妙な点がいくつかある．[HS] の SL_n の内部形式の L パケットに関する結果を踏まえると，G の中心が連結とは限らない場合は，左辺を $\widehat{G}_{\mathrm{der}}$ の普遍被覆を用いる形に修正する必要があるように思う（[A2] も参照）．

注意 3.3. ρ の性質と対応する $\pi \in \Pi_\phi^{J_\chi}$ の性質の関係を調べることは，局所 Langlands-Vogan 対応を理解する上で基本的な問題である．どの程度一般的な状況で予想が定式化されているのか著者は知らないが，少なくとも J_χ が準分裂のときは，以下が同値であると予想されているようである．

(1) ϕ が楕円的である．
(2) L パケット $\Pi_\phi^{J_\chi}$ が少なくとも一つの離散系列表現（二乗可積分表現）を含む．
(3) L パケット $\Pi_\phi^{J_\chi}$ に含まれる表現が，すべて離散系列表現である．

さらに ϕ が楕円的のときは，以下が同値であると予想されているようである．

(1) L パラメータの $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への制限 $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は自明である．
(2) L パケット $\Pi_\phi^{J_\chi}$ に含まれる表現が，すべて超尖点的である．

$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が非自明な場合は，どの ρ に対応する π が超尖点的であるかは，一般にはよく分かっていない．Mœglin, Tadić によれば，G が準分裂な古典群の場合には，ρ が「交代的で穴が無い」場合に π が超尖点的になると予想されている．実際，彼らの構成した局所 Langlands 対応（誘導表現の可約点を用いて特徴付けたもの）において，それが成り立つことが証明されている（[MT], [Mœ]）．

4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の構成 — 幾何的構成の“おもちゃ”として

局所 Langlands 対応の幾何的構成の “おもちゃのモデル” (toy model) として，有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の表現（有限次元複素表現）の構成法を紹介しよう．本節では q を素数の巾とし，$\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする．また，本節で「表現」と言えば，複素数体上の有限次元ベクトル空間への表現のことを意味するものとする．

有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の表現論の研究の歴史は長い．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$（や $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$）の既約表現の分類と既約指標の計算は，今から 100 年以上前に Frobenius, H. Jordan, Schur により完成していた（[Jo], [Schu]）．その結果は，Green により 60 年ほど前に $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ に一般化された（[Gr1]）．Green の定理について述べるために放物誘導について復習する（p 進体上の放物誘導については，本報告集の [佐藤] を参照）．$n = n_1 + \cdots + n_r$ $(r \geq 2)$ を n の分割とする．対角的に埋め込むことで，$M_{n_1,\ldots,n_r} := \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}$ を GL_n の閉部分代数群とみなす．$M_{n_1,\ldots,n_r}$ と上半行列で生成された代数群を $P_{n_1,\ldots,n_r} \subset \mathrm{GL}_n$ とおく．$P_{n_1,\ldots,n_r}$ を GL_n の**標準的放物部分群**という．$i = 1, \ldots, r$ に対し，(ρ_i, V_i) を各 $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)$ の有限次元表現とする．合成

$$P_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow M_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{F}_q) = \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r} \mathrm{GL}(V_1 \otimes \cdots V_r)$$

を $\widetilde{\rho}$ とおく．誘導表現 $\mathrm{Ind}_{P_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)} \widetilde{\rho}$ を $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$ から得られた**放物誘導表現**という．放物誘導表現は既約表現とは限らないが，有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の有限次元表現なので完全可約である．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の有限次元既約表現のうち，どんな放物誘導表現の直和因子にも現れないものを**尖点表現**という．

$\theta\colon \mathbb{F}_{q^n}^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を準同型とする．$\theta, \theta^q, \ldots, \theta^{q^{n-1}}$ が相異なるとき，θ は**一般の位置**にあるという．一般の位置にある θ, θ' に対し，$\theta' = \theta^{q^i}$ となる $i \geq 1$ が存在するとき，$\theta' \sim \theta$ と書く．$x \in \mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ に対し $x^{q^n} = x$ なので $\theta^{q^n} = \theta$ が成り立つ．したがって，関係 $\sim$ は一般の位置にある θ の集合に同値関係を定める．

以下に述べるのが，Green による $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の分類定理である．

定理 4.1 (Green ([Gr1]))**.** 次の自然な全単射がある

$$\Big\{ \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \text{ の尖点表現} \Big\}_{/\cong} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Big\{ \text{一般の位置にある準同型 } \theta\colon \mathbb{F}_{q^n}^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times} \Big\}_{/\sim}$$

左辺は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の同値類の集合を表す．右辺は上で定義した同値関係 $\sim$ による同値類の集合を表す．

θ に対応する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現を π_θ で表す．

定理 4.1 には様々な解釈があると思われるが，ここでは定理 4.1 を局所 Langlands 対応（2.1）の “おもちゃ” とみなすことにしよう（Harish-Chandra による実 Lie 群の離散系列表現の分類の “おもちゃ” と思った方が正統的かもしれない）．準同型 θ を “L パラメータのおもちゃ” とみなし，定理 4.1 を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現に関する “局所 Langlands 対応のおもちゃ” とみなすのである．与えられた θ に対して，π_θ を構成することは，それほどやさしいことではない（興味のある人は，本報告集の [原下] を参考にしながら，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の表現空間の構成を試みるとよい）．実際，Green による定理 4.1 の証明は，Brauer 持ち上げなどの表現論的手法に組合わせ的議論を組み合わせたものであり，π_θ の表現空間を直接構成するものではない．

Deligne-Lusztig は，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現（の表現空間）を幾何的手法により構成する方法を発見した（[DL]）．Deligne-Lusztig の理論は，U_n の場合の Tate-Thompson の結果（[Ta, pp. 102]）や，SL_2 の場合の Drinfeld の結果の一般化である．（GL_n とは限らない）$\mathbb{F}_q$ 上の任意の連結簡約代数群 G に対し

て，$G(\mathbb{F}_q)$ の（尖点的とは限らない）全ての有限次元を幾何的手法により統一的に構成することができる．以下では簡単のため $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の場合を説明する．まず，

$$DL := \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{F}}_q^n \;\middle|\; \left\{ \det\left(X_i^{q^{j-1}} \right) \right\}^{q-1} = 1 \right\}$$

とおく（$\det(X_i^{q^{j-1}})$ は (i,j) 成分が $X_i^{q^{j-1}}$ となる n 次正方行列の行列式を表す）．DL は $\mathbb{F}_q$ 上定義された $(n-1)$ 次元アフィン代数多様体（GL_n の **Deligne-Lusztig 多様体**の一例）である（正確には，ここで定義した DL は代数多様体の $\overline{\mathbb{F}}_q$-有理点の集合であるが，ここでは簡単のため代数多様体と代数多様体の幾何的点の集合を区別しない）．DL は滑らかだが，（$q=2$ のときを除き）幾何的に連結ではない．例えば $n=2$ のときは，DL の条件式は

$$\left\{ \det(X_i^{q^{j-1}}) \right\}^{q-1} = \left\{ \det \begin{pmatrix} X_1 & X_1^q \\ X_2 & X_2^q \end{pmatrix} \right\}^{q-1} = \left(X_1 X_2^q - X_1^q X_2 \right)^{q-1} = 1$$

となり，Drinfeld が考察した代数曲線（SL_2 の Deligne-Lusztig 多様体）の定義方程式 $XY^q - X^qY = 1$ の $(q-1)$ 乗に等しい．さて，ここで大切なことは，有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_{q^n}^\times$ が DL に作用するということである．実際，$(g,\alpha) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_{q^n}^\times$，$\mathbf{v} \in DL$ に対し，

$$(g,\alpha) \cdot \mathbf{v} = g \begin{pmatrix} \alpha X_1 \\ \vdots \\ \alpha X_n \end{pmatrix}$$

とおけば（縦ベクトル $\mathbf{v}$ に対し，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ を行列として作用させ，$\mathbb{F}_{q^n}$ をスカラー倍で作用させれば），$(g,\alpha) \cdot \mathbf{v} \in DL$ が成り立つ（各自確かめよ）．コホモロジーの関手性より，コンパクト台付きの ℓ 進エタールコホモロジー $H_c^i\big(DL, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_{q^n}^\times$ の作用する有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間となる．この空間を使って尖点表現 π_θ を構成するのが Deligne-Lusztig の理論である．

定理 4.2 (Deligne-Lusztig ([DL]))**.** ℓ を q を割らない素数とし，体同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．このとき，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の表現としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{q^n}^\times}\left(H_c^i\big(DL, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big),\ \theta \right) \cong \begin{cases} \pi_\theta & i = n-1 \\ 0 & i \neq n-1 \end{cases}$$

が存在する.（簡単のため，$\mathbb{F}_{q^n}^\times$ の 1 次元表現 θ のことを θ と書いた.）

DL のコホモロジーを用いて，“L パラメータのおもちゃ” θ から出発して，尖点表現 π_θ の表現空間が「自動的」に構成されるわけである．

DL の定義自体は単純な幾何的・線形代数的なものであり，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の表現論は一切必要ない点も注目すべき点であろう（もちろん，定理 4.2 の証明には表現論的考察が不可欠である）．DL がいわば「自動翻訳機」の役割を果たしている．

Green は尖点表現 π_θ の指標を具体的に計算しているので，これについても述べる．

定理 4.3 (Green ([Gr1]))**.** 定理 4.1 において θ に対応する尖点表現を π_θ とおく．$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ とする．g の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の元としての固有多項式を $P_g(T) = \det(T-g) \in \mathbb{F}_q[T]$ とおく．

- $P_g(T) = Q(T)^e$（$Q(T) \in \mathbb{F}_q[T]$ は既約多項式）の形に書けるとする．$Q(T)$ の根の一つを $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ とおく．$m = \dim_{\mathbb{F}_{q^d}} \mathrm{Ker}\big(g - \alpha \cdot \mathrm{id}\big)$ とおく．このとき次が成り立つ．

$$\mathrm{Tr}\,\pi_\theta(g) = (-1)^{n-1} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{\deg Q(T)-1} \theta^{q^i}(\alpha) \right\} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 - q^{j \cdot \deg Q(T)} \right)$$

- $P_g(T)=Q(T)^e$（$Q(T)\in\mathbb{F}_q[T]$ は既約多項式）の形に書けないときは，$\operatorname{Tr}\pi_\theta(g)=0$.

演習問題　$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ の場合に定理 4.1, 定理 4.3 が成り立っていることを，本報告集の [原下] の指標表を見て確かめよ．

定理 4.3 において，g の Jordan 標準形における固有値 α の Jordan ブロックの個数が m である．指標の値 $\operatorname{Tr}\pi_\theta(g)$ が，“L パラメータのおもちゃ” θ の値と

$$\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-S^{j\cdot\deg Q(T)}\right)$$

という g の Jordan ブロックの「形」にしか依存しない多項式（**Green 多項式**）に $S=q$ を代入したものを組み合わせて書けることは注目に値する．このような指標公式が，$\mathbb{F}_q$ 上の任意の連結簡約代数群で成り立つことは，Deligne-Lusztig 理論の（極めて非自明な！）帰結である．

本節の記述は [Lu1], [Lu2] を参考にした．Green の定理（定理 4.1, 定理 4.3）は，もちろん Deligne-Lusztig の理論の特別な場合として証明することができるが，[DL] は任意の簡約代数群を扱っているため，定理 4.1, 定理 4.3 を論文 [DL] から抽出するには，ある程度の眼力が必要かもしれない．Green の証明は組合せ論としても興味深い（[Ma] ）．[Lu1] は Green の定理の幾何的側面を（[DL] 以前に）論じた小冊子であり，今になって読むと興味深い．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の尖点表現の指標については，[Gr1] から 44 年後（！）に書かれた [Gr2] も参照．Lusztig は，[DL] の理論をさらに発展させて，任意の連結簡約代数群 G に対して $G(\mathbb{F}_q)$ の有限次元表現を統一的に分類した．Deligne-Lusztig 理論について日本語で読める文献としては庄司氏による迫力満点の解説が [庄司] にあるので，一読を勧める．なお，Green の定理や Deligne-Lusztig 理論は，岩波数学辞典（第 4 版）では「無限次元表現」の項目に解説されている．

ここでは局所 Langlands 対応の “おもちゃ” として Green の定理や Deligne-Lusztig 理論（のごく一部）を紹介した．実は，これは単なる “おもちゃ” にとどまらない．例えば次のような結果がある．

- §2 で述べたように，[DR] では，「深さ 0 の超尖点表現」に対する局所 Langlands-Vogan 対応が，Deligne-Lusztig 理論（と Bruhat-Tits 理論）を用いて構成されている（[Kal] も参照）．
- いくつかの場合には，局所 Langlands 対応は Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに実現されると期待されている（§5）．一方で，Rapoport-Zink 空間の形式モデルの特殊ファイバーに，Deligne-Lusztig 多様体（やその変種）が現れるという観察がある（[Yo1], [Hara], [Vol], [VW]）．これを用いて Rapoport-Zink 空間のコホモロジーを計算できる場合がある（[Yo1], [ImT]）．

しかし，一般には，Deligne-Lusztig 理論と局所 Langlands 対応の関係はそれほど単純ではない．まだまだ未解明の部分も多い．

本稿では Deligne-Lusztig 理論の一般化が Rapoport-Zink 空間の理論であるかのように説明しているが，実際には，Deligne-Lusztig 理論の完成後にその p 進版として Rapoport-Zink 空間が導入されたわけではない．Deligne-Lusztig 理論の誕生と Rapoport-Zink 空間（の前身である Lubin-Tate 空間や Drinfeld 上半空間）の誕生はほぼ同時期（1970 年台初頭）であり（[De], [Dr3], [Dr1], [Dr2]），両者は並行して発展してきた．Deligne-Lusztig 理論に関する Drinfeld の先駆的研究（SL_2 の場合）は，おそらく，Drinfeld 上半空間の研究に示唆されたものである（一方で，Tate-Thompson の研究（[Ta, pp. 102]）は，いわゆる代数的サイクルの「Tate 予想」に端を発する）．有限群 $G(\mathbb{F}_q)$ の表現論は Langlands 対応の直接の対称ではないにも関わらず，[DL] には Langlands 対応を参考にしたと思われる記述（双対群など）が随所に見られるのは興味深い．

5. Rapoport-Zink 空間とそのコホモロジー

Rapoport-Zink 空間の一般的な定義は複雑なので，ここではいくつかの典型的な例を中心に説明する．一般的な定義は [RZ] を参照（[Ra], [Far1], [SW] も参照）．要点をかいつまんで説明すると次の通り．

(1) Rapoport-Zink データと呼ばれる（やや複雑な）線形代数的データから，Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}_\infty$ が定義される．

(2) Rapoport-Zink データからは，$\mathbb{Q}_p$ 上の簡約代数群 G とその内部形式 J および有限次拡大 $E/\mathbb{Q}_p$（局所レフレックス体）が定義される．

(3) Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}_\infty$ のコホモロジー $H_c^i\big(\mathcal{M}_\infty, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)$ には直積群 $G(\mathbb{Q}_p) \times J(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ が作用する．この作用が局所 Langlands-Vogan 対応と局所 Jacquet-Langlands 対応を実現していると予想される（Kottwitz 予想）．

任意の簡約代数群 G に対して G に伴う Rapoport-Zink 空間が存在するわけではないことに注意しよう（例えば G が例外群となるような Rapoport-Zink データは存在しない）．これは，任意の簡約代数群に対して構成できる Deligne-Lusztig 多様体との大きな違いであり，欠点でもある．また，[RZ] では，Rapoport-Zink 空間以外に，p **進対称空間**と呼ばれる p 進解析空間も構成されている．Rapoport-Zink 空間と p 進対称空間は p 進周期写像で繋がる．p 進対称空間やそのコホモロジーについては [DOR] を参照．しかし，p 進対称空間のコホモロジーは貧弱であり，局所 Langlands 対応の幾何的構成に応用できるほど強力なものではないようである．

Rapoport-Zink 空間を定義する出発点となるのが，**Rapoport-Zink データ**と呼ばれる 9 つ組のデータ

$$\big(F,\ B,\ *,\ \mathcal{O}_B,\ V,\ \langle,\rangle,\ b,\ \mu,\ \mathcal{L}\big)$$

である．これらはおよそ次のようなものである（正確な定義はとても複雑なので省略する）．

- F は基礎体となる p 進体．
- B は F 上の中心的単純環．$*\colon B \longrightarrow B$ は対合（$(xy)^* = y^*x^* (\forall x, y \in B)$, $*^2 = \mathrm{id}$ をみたす $\mathbb{Q}_p$-線形写像）．$\mathcal{O}_B \subset B$ は $*$ の作用で安定な $\mathcal{O}_F$-整環．
- V は有限生成自由 B 加群．$\langle,\rangle\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ は交代形式で，任意の $b \in B$, $v, w \in V$ に対し $\langle bv, w\rangle = \langle v, b^*w\rangle$ をみたすもの．
- $b \in G\big(\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}\big)$ は basic な isocrystal（$\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ は $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大の p 進完備化）．
  $\mu\colon \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大上定義された準同型で，Hodge 分解に相当する線形代数的データ．(ここでは isocrystal や Hodge 分解の説明はしない（[RZ] を参照）．ひとまずは，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の $\mathcal{O}_B$ の作用を持つ p 可除群 X_0 を定める線形代数的データと思えば十分であろう.)
- $\mathcal{L}$ は V の $\mathcal{O}_B$-格子の列（lattice chain）．Rapoport-Zink 空間の parahoric なレベル構造に対応する．

ここでは状況を単純化して説明した．実際には [RZ] ではもう少し一般化した設定で定義されている．Rapoport-Zink データには **EL 型**と **PEL 型**の二種類がある．ここに述べた 9 つ組は PEL 型の場合である．EL 型の場合は交代形式 $\langle,\rangle$ は不要である．

これらのデータから 7 つ組のデータ（中間生成物）

$$\big(E,\ G,\ J,\ \chi_b,\ r_\mu,\ X_0,\ \lambda\big)$$

が定まる．

- E は μ の共役類の定義体として定義される $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大である．E を**局所レフレックス体**という（**局所志村体**ともいう）．
- G は $\mathbb{Q}_p$ 上の簡約代数群であり，PEL 型の場合は，

$$G(\mathbb{Q}_p) = \left\{ (x,a) \in \mathrm{GL}_B(V) \times \mathbb{Q}_p^\times \;\middle|\; \forall v, w \in V,\ \langle gv,\, gw\rangle = a\langle v, w\rangle \right\}$$

  で定義される．EL 型の場合は $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_B(V)$ である．Rapoport-Zink データに関する適当な仮定（“直交型でない” など）の下で，G は連結簡約代数群となる．
- J は G の内部形式.（なお，b が basic でないときも Rapoport-Zink 空間は定義できるが，その場合は一般には J は G の Levi 部分群の内部形式となる.）
- $\chi_b\colon Z(\widehat{G})^{W_F} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は準同型.
- $r_\mu\colon \widehat{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\mu)$ は G の双対群（$\mathbb{C}$ 上の簡約代数群）$\widehat{G}$ の有限次元表現であり，r_μ の最高ウェイトが $\mu\colon \mathbb{G}_m \longrightarrow G$（Hodge 分解）の双対となるものとして定まる．V_μ は有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間である．
- X_0 は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上定義された p 可除群で B が準同種として作用するもの.（一般に，p 可除群 X_0, X_0' に対し，$f \in \mathrm{Hom}\bigl(X_0,\, X_0'\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が**準同種** (quasi-isogeny) とは，$g \circ f = \mathrm{id}$ をみたす $g \in \mathrm{Hom}\bigl(X_0',\, X_0\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が存在することをいう．$\mathbb{Q}_p$-代数の準同型 $B \hookrightarrow \bigl(\mathrm{End}\, X\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が与えられているとき，X は B が準同種として作用するという.）
- （PEL 型の場合のみ）$\lambda_0\colon X_0 \longrightarrow X_0^\vee$ は X_0 の準偏極.（準偏極の定義は次の通り：X_0 の双対 p 可除群を $X_0^\vee$ とおく．準同種 $\lambda_0\colon X_0 \longrightarrow X_0^\vee$ に対し，その双対を $\lambda_0^\vee\colon \bigl(X_0^\vee\bigr)^\vee = X_0 \longrightarrow X_0^\vee$ とおく．$\lambda_0 = -\lambda_0^\vee$ が成り立つとき，λ_0 を p 可除群 X_0 の**準偏極** (quasi-polarization) という.）

そして，これらの中間生成物から Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}_\infty$ が定義され，局所 Langlands 対応の幾何的実現に関する予想が述べられることになる．

いくつかの例を挙げて，もう少しだけ説明しよう．以下では，$p \neq 2$ は奇素数とする．

	(例 1) EL 型	(例 2) PEL 型	(例 3) PEL 型
F	$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{Q}_p$
B	$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{Q}_p$ の不分岐 2 次拡大
$\mathcal{O}_B$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$	B の整数環
V	$\mathbb{Q}_p^r$	$\mathbb{Q}_p^{2r}$	B^{r+s}
$\langle , \rangle$	(なし)	V 上の交代形式	V 上のエルミート形式 から定まる交代形式
$\mathcal{L}$	$\{p^i\mathbb{Z}_p^r\}_{i\in\mathbb{Z}}$	$\{p^i\mathbb{Q}_p^{2r}\}_{i\in\mathbb{Z}}$	$\{p^i\mathcal{O}_B^{r+s}\}_{i\in\mathbb{Z}}$
E	$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{Q}_p$	B ($r \neq s$ のとき) または $\mathbb{Q}_p$ ($r = s$ のとき)
G	GL_r	GSp_{2r}	$\mathrm{GU}_{r,s}$

Rapoport-Zink データおよび中間生成物の例
（$b, \mu, \mathcal{L}$ は省略したので，この表は Rapoport-Zink データの定義としては不十分である.）

(例 1) は**Lubin-Tate 空間**（[HT] において GL_n の局所 Langlands 対応の証明に用いられた Rapoport-Zink 空間）に対応する．(例 2) は主偏極アーベル多様体のモジュライ空間（Siegel モジュラー多様体）

の超特異部分に対応する（[KO], [LO], [Hara] などで研究されている）．(例 3) はユニタリ型志村多様体の超特異部分に対応する（[Vol], [VW], [Zh] などで研究されている）．

これらの例において，対応する p 可除群 X_0 は次のようになる（正確には，X_0 は以下のものと同種となる）．

(例 1): X_0 は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の高さ r の 1 次元 p 可除群．例えば，$r=1$ なら $X_0 \cong \mathbb{G}_m[p^\infty]$ であり，$r=2$ なら $X_0 \cong E_{\mathrm{ss}}[p^\infty]$（$E_{\mathrm{ss}}$ は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線）である．

(例 2): $X_0 = (E_{\mathrm{ss}}[p^\infty])^{\oplus r}$．$\lambda_0\colon X_0 \longrightarrow X_0^\vee$ は楕円曲線 E_{ss} の主偏極から定まる準偏極．

(例 3): $X_0 = (E_{\mathrm{ss}}[p^\infty])^{\oplus(r+s)}$．$\lambda_0\colon X_0 \longrightarrow X_0^\vee$ は (例 2) と同様．B の準同種としての作用 $\iota\colon B \hookrightarrow \bigl(\mathrm{End}\, X_0\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は，任意の $x \in \mathcal{O}_B$ に対し，$\iota(x)$ の Lie 環 $\mathrm{Lie} X_0$ への作用が行列

$$\mathrm{diag}\bigl(\underbrace{\phi(x), \ldots, \phi(x)}_{r\ 個}, \underbrace{\phi(x)^p, \ldots, \phi(x)^p}_{s\ 個}\bigr)$$

で表されるもの（$\phi\colon \mathcal{O}_B \longrightarrow \mathbb{F}_{p^2}$ は $\mathrm{mod}\ p$ 写像．diag は $\phi(x)$ が r 個，$\phi(x)^p$ が s 個並んだ対角行列を表す）．

G の内部形式 J は，$\mathbb{B}$ の作用と準偏極の入った p 可除群 X_0 を用いて，次のように定義される．X_0 から X_0 への準同種であって，B の作用と可換で，準偏極 λ_0 を $\mathbb{Q}_p^\times$ の元倍を除いて保つもののなす群を

$$J(\mathbb{Q}_p) := \text{q-Isog}_{\mathcal{O}_B,\, \mathbb{Q}_p^\times \lambda_0}\bigl(X_0\bigr)$$

とおく．$J(\mathbb{Q}_p)$ は p 可除群を使わずに isocrystal を用いて記述することもできる．その記述を用いると $J(\mathbb{Q}_p)$ が G の内部形式の $\mathbb{Q}_p$-有理点のなす群とみなせることが分かる．

Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}_\infty$ は，ここでは正確な定義はしないが，だいたい次のようなものである．まず，p 可除群の準同種のモジュライ空間として，$\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_{E^{\mathrm{ur}}}$ 上の形式スキーム $\breve{\mathcal{M}}$ が定義される（$\mathcal{O}_{E^{\mathrm{ur}}}$ は E^{ur} の整数環）．$\breve{\mathcal{M}}$ の生成ファイバーとして "p 進解析空間" $\mathcal{M}_0$（レベル 0 の Rapoport-Zink 空間）が定義される．普遍 p 可除群の p^n 等分点上のレベル構造を付加構造として考えることで，レベルの n の Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}_n$ が定義される．$\mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{M}_0$ は p 進解析空間のエタール被覆である．そして，射影極限をとることで，無限レベルの **Rapoport-Zink 空間**が

$$\mathcal{M}_\infty := \varprojlim_n \mathcal{M}_n$$

として定義される．射影系 $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geq 0}$ を **Rapoport-Zink 塔**ともいう．$\mathcal{M}_\infty$ は $\widehat{E^{\mathrm{ur}}}$ 上の p 進解析空間（の射影極限または p 進解析空間の射影系）である．ここでは大雑把に "p 進解析空間" や "射影極限" と述べたが，Rapoport-Zink 空間の定式化に用いられる p 進解析空間の枠組みとしては，Berkovich 空間・adic 空間・(pre-)perfectoid 空間などのいくつかの理論があり，その選択は技術的に大切なポイントであるが，ここでは説明を省略する（(pre-)perfectoid 空間を使った定式化は [SW] を参照）．

$\mathcal{M}_\infty$ の雰囲気を説明するために，$\mathbb{C}_p$-有理点の集合 $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{C}_p)$（$\mathbb{C}_p$ は E の代数閉包の p 進完備化）について述べる（$\mathcal{M}_\infty(\mathbb{C}_p)$ を集合として定めただけでは，p 進解析空間として $\mathcal{M}_\infty$ を定義したことにはならないが）．$\mathcal{M}_\infty(\mathbb{C}_p)$ は次のような 5 つ組の同値類の集合である．

$$\mathcal{M}_\infty(\mathbb{C}_p) = \Bigl\{\bigl(X,\ \iota,\ \lambda,\ \rho,\ \eta\bigr)\Bigr\}_{/\sim}$$

$X, \iota, \lambda, \rho, \eta$ は以下をみたす．

- X は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 上の p 可除群（$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は $\mathbb{C}_p$ の整数環）．
- $\iota\colon B \hookrightarrow \bigl(\mathrm{End}\, X\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p$-代数の準同型で，Lie 環への作用のある条件（**Kottwitz 条件**）をみたす．この条件は（ここでは説明しないが） Hodge 分解 μ を用いて定式化される．

- （PEL 型の場合のみ） $\lambda\colon X \longrightarrow X^\vee$ は準偏極.
- $\rho\colon X_0 \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ は準同種で，B の作用と可換で，準偏極 λ_0 の像が λ の $\mathbb{Q}_p^\times$ の元倍となるもの.
- $\eta\colon V \xrightarrow{\cong} V_pX$ は X の**レベル構造**.（レベル構造の定義は以下の通り：X の **Tate 加群**を $V_pX := \bigl(\varprojlim_s X[p^s](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおく．EL 型の場合，レベル構造とは B 加群の同型のことである．PEL 型の場合は，さらに，交代形式に関する次の条件を課す．準偏極 λ より V_pX 上の交代形式 $V_pX \times V_pX \longrightarrow V_p\bigl(\mathbb{G}_m[p^\infty]\bigr) =: \mathbb{Q}_p(1)$ が定まるから，1 次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間の同型 $\mathbb{Q}_p(1) \cong \mathbb{Q}_p$ を固定することで，交代形式 $V_pX \times V_pX \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ が定まる．η により V 上の交代形式 $\langle,\rangle$ から誘導される V_pX 上の交代形式が，準偏極 λ から定まる V_pX 上の交代形式と $\mathbb{Q}_p^\times$ の元倍を除いて等しいとき，η をレベル構造という（η がレベル構造であるかどうかは，同型 $\mathbb{Q}_p(1) \cong \mathbb{Q}_p$ のとりかたによらない）.）

5 つ組 $(X, \iota, \lambda, \rho, \eta)$，$(X', \iota', \lambda', \rho', \eta')$ が同値とは，準同種 $f\colon X \longrightarrow X'$ であって，$\iota' = f \circ \iota$, $\lambda' = f^\vee \circ \lambda \circ f^{-1}$, $\rho' = \bigl(f \pmod p\bigr) \circ \rho$, $\eta' = f \circ \eta$ をみたすものが存在することをいう.

直積 $G(\mathbb{Q}_p) \times J(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ が Rapooprt-Zink 空間の ℓ 進エタールコホモロジー（ℓ は p と異なる素数）

$$H_c^i\bigl(\mathcal{M}_\infty, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr) := \varinjlim_n H_c^i\bigl(\mathcal{M}_n \widehat{\otimes}_{\widehat{E^{\mathrm{ur}}}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)$$

に作用する．$G(\mathbb{Q}_p) \times J(\mathbb{Q}_p)$ の $\mathcal{M}_\infty$ への作用は，$\mathbb{C}_p$-有理点のレベルでは次のように書ける．$G(\mathbb{Q}_p)$ は V に線形に作用し $J(\mathbb{Q}_p)$ は X_0 に自己準同種として作用するから，$(g, j) \in G(\mathbb{Q}_p) \times J(\mathbb{Q}_p)$ に対し，

$$(g, j) \cdot \bigl(X,\ \iota,\ \lambda,\ \rho,\ \eta\bigr) = \bigl(X,\ \iota,\ \lambda,\ \rho \circ j^{-1},\ \eta \circ g^{-1}\bigr)$$

が作用を与える．W_E のコホモロジーへの作用は次の通りである．惰性群 $I_E \subset W_E$ については，

$$I_E \ \cong\ \Gamma_{\widehat{E^{\mathrm{ur}}}} := \mathrm{Gal}\bigl(\widehat{\overline{E^{\mathrm{ur}}}}/\widehat{E^{\mathrm{ur}}}\bigr)$$

であり，$\Gamma_{\widehat{E^{\mathrm{ur}}}}$ は $\mathbb{C}_p$ に自然に作用するから，コホモロジーの関手性により I_E は $H_c^i\bigl(\mathcal{M}_\infty \widehat{\otimes}_{\widehat{E^{\mathrm{ur}}}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)$ に作用する．この作用は絶対 Galois 群 Γ_E の作用には伸びないが，Weil descent データを用いることで Weil 群 W_E の作用に延長することができる（詳しくは [RZ, p.100, 3.48], [Far1, p.71, 4.4] を参照）.

6. 局所 Langlands 対応の幾何的構成 — Kottwitz 予想をめぐって

Rapoport-Zink 空間のコホモロジー $H_c^i\bigl(\mathcal{M}_\infty, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)$ への $G(\mathbb{Q}_p) \times J(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ の作用を用いて，局所 Langlands 対応を構成するのが目的であった．これに関する Kottwitz による予想を紹介する.

以下では ℓ は p と異なる素数とし，体同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する.

§5 と同様,（適当な技術的仮定をみたす）Rapoport-Zink データ $(F, B, *, \mathcal{O}_B, V, \langle,\rangle, b, \mu, \mathcal{L})$ を固定する．このデータ定まる中間生成物を $(E, G, J, \chi_b, r_\mu, X_0, \lambda)$ とおき，これから定まる Rapoport-Zink 空間を $\mathcal{M}_\infty$ とおく.

次を仮定する.

- G は準分裂な連結簡約代数群である.
- G の中心 $Z(G)$ は連結である.
- G および J に対して局所 Langlands 対応（予想 2.1）と局所 Langlands-Vogan 対応の Kottwitz によるバージョン（予想 3.1）が成立する.

さらに，$\phi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$ を G の L パラメータとし，次を仮定する.

- ϕ は楕円的である（予想 3.1 を参照）.）
- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への制限 $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は自明である.

双対群 $\widehat{G}$ の L 群は半直積 ${}^L G = \widehat{G} \rtimes W_F$ であるが，局所レフレックス体 E の定義より W_E への制限は分裂する（$\widehat{G} \rtimes W_E = \widehat{G} \times W_E$）. $r_\mu \colon \widehat{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\mu)$ （中間生成物の一つ）との合成により，W_E の有限次元表現

$$W_E \xrightarrow{\phi|_{W_E}} {}^L G \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \widehat{G} \xrightarrow{r_\mu} \mathrm{GL}(V_\mu)$$

が得られる. $\mathrm{Im}(\mathrm{pr}_1 \circ \phi|_{W_E})$ と $\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ は互いに可換であるから，直積群 $W_E \times \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ は V_μ に作用する：

$$W_E \times \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi) \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\mu)$$

$\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ の表現 ρ に対し，

$$W(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)}\left(\rho, V_\mu\right)$$

とおく. V_μ は $W_E \times \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ の表現なので，$W(\rho)$ は W_E の表現である.

$\tau \in \Pi_\phi^J$ を L パラメータ ϕ に対応する J の L パケットの元とする. ρ_τ を予想 3.1 で τ に対応する $\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ の既約表現であって，$\rho_\tau|_{Z(\widehat{G})^{W_F}} = \chi_b$ をみたすとする.（χ_b は Rapoport-Zink データより定まる準同型（中間生成物の一つ）であり，上に述べた仮定の下で，χ_b に対応する G の内部形式は J となる.）

予想 6.1 (Kottwitz ([Ra], Conjecture 5.1)). 以上の設定の下で，$G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ の表現としての同型

$$\mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^i(\mathcal{M}_\infty, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),\ \tau\right)_{G(\mathbb{Q}_p)\text{-smooth}} \cong \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_\pi \pi \otimes W(\rho_\tau \otimes \rho_\pi) & i = \dim \mathcal{M}_\infty \\ 0 & i \neq \dim \mathcal{M}_\infty \end{cases}$$

が成り立つことが予想される. 左辺の “$G(\mathbb{Q}_p)$-smooth” は，$G(\mathbb{Q}_p)$ が滑らかに作用するベクトルのなす部分空間を表す. 右辺の π は，G の L パケットの元 $\pi \in \Pi_\phi^G$ であって，予想 3.1 で π に対応する $\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\phi)$ の既約表現が $\rho_\tau|_{Z(\widehat{G})^{W_F}} = 1$ をみたすものを渡る（この条件は G が準分裂という仮定に対応する）.

ある程度一般的な設定で述べたため予想 6.1 は複雑に見えるかもしれないが，要するに，$J(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現 $\tau \in \Pi_\phi^J$ から出発して，$\mathcal{M}_\infty$ のコホモロジーから，$G(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現 $\pi \in \Pi_\phi^G$ と W_E の有限次元表現（L パラメータ ϕ に r_μ を合成したもの）が「自動的」に出力されるわけである. まさに，$\mathcal{M}_\infty$ が局所 Langlands 対応の「自動翻訳機」の役割を果たすわけである.（定理 4.2（Deligne-Lusztig 理論）と比較すると面白いだろう.）

ここではかなり沢山の仮定をおいたが，もちろん，もう少し一般的な設定で予想を定式化することもできる. G は準分裂とは限らない場合（例えば Drinfeld 上半空間の場合がそうである）の予想を述べることは，応用上も大切な問題である. しかし，一般の Rapoport-Zink データについて予想を定式化するためには，技術的に微妙な点がいくつかある. まだ予想の決定版といえるものは提出されていないようである.

[Ra, Conjecture 5.1] では，i に関する交代和をとった仮想表現としての予想が述べられている. Deligne-Lusztig 理論の結果や，Lubin-Tate 空間の場合の Boyer の定理（[Boy]），他の小さな群の場合の研究結果（GSp_4 や $\mathrm{GU}_{1,2}$ など）を勘案すると（[ItM1], [ItM2], [It]），超尖点表現のみからなる L パケットについては，π は中間次数のコホモロジー $H_c^{\dim \mathcal{M}_\infty}$ のみに現れると期待するのが自然である（注意 3.3 も参照）.

分かっていること，まだ分からないこと．最近になって局所 Langlands 予想については大きな進展があったが（[A3], [Mo] など），残念ながら，その幾何的構成にあたる Kottwitz 予想（予想 6.1）については，まだ分からないことが多い．ここでは知られている結果のいくつかを紹介する．

もっとも基本的なのが，Lubin-Tate 空間の場合である（§5 の (例 1)．ただし F は一般の p 進体とする）．この場合は，$G = \mathrm{GL}_n$ であり $J = D^{\times}$ は F 上の Hasse 不変量 $1/n$ の中心的斜体の乗法群である．L パケットの位数は 1 なので，Langlands-Vogan 予想は不要である．GL_2 の場合の先駆的研究 [De], [Ca1], [Ca2] を踏まえて，一般の n については，コホモロジーの交代和のレベルでは [HT] により解決されている．交代和を取る前の各次数のコホモロジーの決定は [Boy] による（なお，Boyer は楕円的とも $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が自明とも限らない ϕ に対してコホモロジーの計算を行っている）．[HT] 以前に Drinfeld 上半空間の場合（この場合は $G = D^{\times}$，$J = \mathrm{GL}_n$ となり G, J の役割が入れ替わる！（[Fal], [Far2], [SW]））のコホモロジーの計算が [Harr] で行われていた．特別な G（主に $G = \mathrm{GL}_2, \mathrm{GL}_n$）の場合の予想 6.1 への大域的手法を使わないアプローチとしては，例えば [Yo2], [ImT] を参照．

G が GL_n（やその内部形式）以外の群の場合に予想 6.1 が知られている場合はそれほど多くはない．ユニタリ型の場合（(§5 の (例 3) の場合，特に $\mathrm{U}_{1,2}$ の場合）の研究が [Far1] にある．また，GSp_4 および $\mathrm{GU}_{1,2}$ の場合の研究が，[ItM1], [ItM2], [It], [Mi1], [Mi2] にある．一般に，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が自明でない楕円的な L パラメータについては，超尖点表現が中間次数以外のコホモロジーにも現れるようである．予想 6.1 をより精密に定式化し直すことが望ましいだろう．

Rapoport-Zink 空間の幾何学やコホモロジーの研究については，予想 6.1 と関係のあるものから直接の関係は無さそうなものまで含めて，最近は様々な方向への進展があるようである．著者にはその詳細について述べる紙数も能力も無いので，いくつかの参考文献 [Fal], [Far2], [Ked], [RV], [SW], [Zh] を挙げるに留める．

局所類体論について振り返ってみよう．局所類体論は，まず大域類体論の系として証明され（Hasse, 1930 年代)，その後で局所類体論の局所的証明が発見された．今では大域類体論を証明する途中のステップとして局所類体論が証明されることが多いのはご承知の通りである．現在では，局所類体論を幾何的方法（Lubin-Tate 形式群の理論 = GL_1 の Rapoport-Zink 空間の理論）を用いて証明することもできるが，そのような証明が与えられたのは比較的最近のことである（「Coleman のノルム作用素」の以降であろう．[Iw], [Yo1]）．局所 Langlands 対応については，GL_2 の場合は純局所的な証明が知られているものの（[BH]），それ以外の群では，今のところどこかの段階で保型表現論や志村多様体論などの大域的手法が必要である．GL_n 以外の簡約代数群 G の局所 Langlands 対応は，今のところ何らかの形で $\mathrm{LLC}_{\mathrm{GL}_n}$ を経由して間接的に特徴付けられることが多い（[DR] のように直接的な構成法を与える場合は例外として）．一般の簡約代数群 G に対する局所 Langlands 対応の理解が GL_1 のレベルに達するには，まだもう少し時間がかかりそうな気がする．

参考文献

[A1] Arthur, J., *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Orbites unipotentes et représentations, II. Astérisque No. 171-172 (1989), 13-71.

[A2] Arthur, J., *A note on L-packets*, Pure Appl. Math. Q. 2 (2006), no. 1, 199-217.

[A3] Arthur, J., *The Endoscopic Classification of Representations: Orthogonal and Symplectic Groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 61 (2013).

[A4] Arthur, J., *On parameters for the group* $\mathrm{SO}(2n)$, preprint, 2013.

[Bor] Borel, A., *Automorphic L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, 27-61, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Boy] Boyer, P., *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples*, Invent. Math. 177 (2009), no. 2, 239-280.

[BH] Bushnell, C. J., Henniart, G., *The local Langlands conjecture for GL(2)*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 335. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Ca1] Carayol, H., *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 3, 409-468.

[Ca2] Carayol, H., *Nonabelian Lubin-Tate theory*, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 15-39, Perspect. Math., 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Cog] Cogdell, J. W., *Dual groups and Langlands functoriality*, An introduction to the Langlands program (Jerusalem, 2001), 251-268, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[DOR] Dat, J.-F., Orlik, S., Rapoport, M., *Period domains over finite and p-adic fields*, Cambridge Tracts in Mathematics, 183. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[DR] DeBacker, S., Reeder, M., *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability*, Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 3, 795-901.

[De] Deligne, P., *Lettre à Piatetskii-Shapiro*, 1973.

[DL] Deligne, P., Lusztig, G., *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) 103 (1976), no. 1, 103-161.

[Dr1] Drinfeld, V. G., *Elliptic modules*, Mat. Sb. (N.S.) 94(136) (1974), 594-627, 656.

[Dr2] Drinfeld, V. G., *Elliptic modules. II*, Mat. Sb. (N.S.) 102(144) (1977), no. 2, 1820-194, 325.

[Dr3] Drinfeld, V. G., *Coverings of p-adic symmetric domains*, Funkcional. Anal. i Priložen. 10 (1976), no. 2, 29-40.

[Fal] Faltings, G., *Coverings of p-adic period domains*, J. Reine Angew. Math. 643 (2010), 111-139.

[Far1] Fargues, L., *Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales*, in Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales, Astérisque No. 291 (2004), 1-199.

[Far2] Fargues, L., *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques*, in L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, 1-325, Progr. Math., 262, Birkhäuser, Basel, 2008.

[GGP] Gan, W. T., Gross, B. H., Prasad, D., *Symplectic local root numbers, central critical L-values and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque 346 (2012), 1-110.

[GT1] Gan, W. T., Takeda, S., *The local Langlands conjecture for* GSp(4), Ann. of Math. (2) 173 (2011), no. 3, 1841-1882.

[GT2] Gan, W. T., Takeda, S., *The local Langlands conjecture for* Sp(4), Int. Math. Res. Not. 2010, no. 15, 2987-3038.

[Gr1] Green, J. A., *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402-447.

[Gr2] Green, J. A., *Discrete series characters for* $\mathrm{GL}(n,q)$, Algebr. Represent. Theory 2 (1999), no. 1, 61-82.

[Hara] Harashita, S., *Ekedahl-Oort strata contained in the supersingular locus and Deligne-Lusztig varieties*, J. Algebraic Geom. 19 (2010), no. 3, 419-438.

[Harr] Harris, M., *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces; elaboration of Carayol's program*, Invent. Math. 129 (1997), no. 1, 75-119.

[HT] Harris, M., Taylor, R., *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, With an appendix by Vladimir G. Berkovich., Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[He1] Henniart, G., *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires*, Invent. Math. 113 (1993), no. 2, 339-350.

[He2] Henniart, G., *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. 139 (2000), no. 2, 439-455.

[He3] Henniart, G., *Une caractérisation de la correspondance de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(n)$, Bull. Soc. Math. France 130 (2002), no. 4, 587-602.

[HS] Hiraga, K., Saito, H., *On L-packets for inner forms of* SL_n, Mem. Amer. Math. Soc. 215 (2012), no. 1013.

[ImT] Imai, N., Tsushima, T., *Geometric realization of the local Langlands correspondence for representations of conductor three*, preprint, arXiv:1205.0734

[ItM1] Ito, T., Mieda, Y., *Cuspidal representations in the l-adic cohomology of the Rapoport-Zink space for* GSp(4), preprint, arXiv:1005.5619

[ItM2] Ito, T., Mieda, Y., *Supercuspidal representations in the cohomology of the Rapoport-Zink space for the unitary group in three variables*, in preparation.

[It] Ito, T., *Supercuspidal representations in the cohomology of the Rapoport-Zink space for the unitary group in three variables*, 数理解析研究所講究録 1817 『保型表現とその周辺』, 2013.

[Iw] Iwasawa, K., *Local class field theory*, Oxford Science Publications., Oxford Mathematical Monographs., Oxford University Press, New York, 1986.

[Jo] Jordan, H. E., *Group-Characters of Various Types of Linear Groups*, Amer. J. Math. 29 (1907), no. 4, 387-405.

[Kal] Kaletha, T., *Supercuspidal L-packets via isocrystals*, Amer. J. Math 136 (2014), no. 1, 203-239.

[KO] Katsura, T., Oort, F., *Families of supersingular abelian surfaces*, Compositio Math. 62 (1987), no. 2, 107-167.

[Ked] Kedlaya, K., *Relative p-adic Hodge theory and Rapoport-Zink period domains*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, 258-279, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[KP] Kirby, L., Paris, J., *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 4, 285-293.

[Ko1] Kottwitz, R. E., *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), no. 3, 611-650.

[Ko2] Kottwitz, R. E., *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 161-209, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[LL] Labesse, J.-P., Langlands, R. P., *L-indistinguishability for* SL(2), Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726-785.

[Laf] Lafforgue, L., *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. 147 (2002), no. 1, 1-241.

[LRS] Laumon, G., Rapoport, M., Stuhler, U., *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. 113 (1993), no. 2, 217-338.

[LO] Li, K.-Z., Oort, F., *Moduli of supersingular abelian varieties*, Lecture Notes in Mathematics, 1680. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Lu1] Lusztig, G., *The discrete series of* GL_n *over a finite field*, Annals of Mathematics Studies, No. 81. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[Lu2] Lusztig, G., *On the discrete series representations of the classical groups over finite fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, pp. 465-470. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

[Ma] Macdonald, I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[Mi1] Mieda, Y., *Lefschetz trace formula and l-adic cohomology of Rapoport-Zink tower for* $\mathrm{GSp}(4)$, preprint, arXiv:1212.4922

[Mi2] Mieda, Y., *Zelevinsky involution and ℓ-adic cohomology of the Rapoport-Zink tower*, preprint, arXiv:1401.5135

[Mœ] Mœglin, C., *Classification et changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p-adiques*, Pacific J. Math. 233 (2007), no. 1, 159-204.

[MT] Mœglin, C., Tadić, M., *Construction of discrete series for classical p-adic groups*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 3, 715-786.

[Mœ] Mœglin, C., *Classification et changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p-adiques*, Pacific J. Math. 233 (2007), no. 1, 159-204.

[Mo] Mok, C.-P., *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, to appear in Memoirs of the American Mathematical Society.

[Ra] Rapoport, M., *Non-Archimedean period domains*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 423-434, Birkhäuser, Basel, 1995.

[RV] Rapoport, M., Viehmann, E., *Towards a theory of local Shimura varieties*, preprint, arXiv:1401.2849

[RZ] Rapoport, M., Zink, Th., *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, 141. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Ro] Rogawski, J. D., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies, 123. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[Schu] Schur, I., *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. 132 (1907), 85-137.

[Scho] Scholze, P., *The local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, Invent. Math. 192 (2013), no. 3, 663-715.

[SW] Scholze P., Weinstein, J., *Moduli of p-divisible groups*, preprint, arXiv:1211.6357

[Ta] Tate, J. T., *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), 93-110, Harper & Row, New York 1965.

[Vog] Vogan, D. A., Jr., *The local Langlands conjecture*, Representation theory of groups and algebras, 305-379, Contemp. Math., 145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[Vol] Vollaard, I., *The supersingular locus of the Shimura variety for* $\mathrm{GU}(1,s)$, Canad. J. Math. 62 (2010), no. 3, 668-720.

[VW] Vollaard, I., Wedhorn, T., *The supersingular locus of the Shimura variety of* $\mathrm{GU}(1,n-1)$ *II*, Invent. Math. 184 (2011), no. 3, 591-627.

[Yo1] Yoshida, T., *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 17 (2008), no. 2, 411-438.

[Yo2] Yoshida, T., *On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles*, Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007), 361-402, Adv. Stud. Pure Math., 58, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Zh] Zhang, W., *On arithmetic fundamental lemmas*, Invent. Math. 188 (2012), no. 1, 197-252.

[庄司] 庄司俊明,『ドリーニュ-ルスティック指標を訪ねて — 有限シュバレー群の表現論 —』(堀田良之, 庄司俊明, 三町勝久, 渡辺敬一, 『群論の進化 (代数学百科)』, 朝倉書店, 2004 年 に収録)

[原下] 原下秀士, 局所類体論と有限群の表現論 (プレサマースクール), 本報告集.

[池松] 池松泰彦, $\mathrm{U}_2(F)$, $\mathrm{U}_3(F)$ の既約表現の endoscopic description, 本報告集.

[今野] 今野拓也, p 進簡約群の構造, 本報告集.

[近藤] 近藤智, セグメントによる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現の構成, 本報告集.

[三枝] 三枝洋一, $\mathrm{GL}_n(F)$ の局所 Langlands 対応, 本報告集.

[佐藤] 佐藤信夫, $\mathrm{GL}_n(F)$ の放物型誘導表現, 本報告集.

[高瀬] 高瀬幸一, 完全不連結群のスムーズ表現の基礎, 本報告集.

[時本] 時本一樹, 超カスプ表現の構成 — GL_2 の場合を中心に, 本報告集.